❉ Chapitre 20 ❉

Équations de droites

Objectif du chapitre :

- Reconnaitre une équation de droite.
- Tracer une droite d'équation connue et déterminer l'appartenance d'un point à cette droite.
- Déterminer le coefficient directeur, l'ordonnée à l'origine ainsi que l'équation d'une droite à partir de sa représentation graphique.

I. Vecteur directeur et équation cartésienne d'une droite

Définition 1:

Soient A et B deux point d'une droite $\mathscr{D}$ du plan.
On appelle vecteur directeur de $\mathscr{D}$ tout vecteur $\overrightarrow{u}$ colinéaire à $\overrightarrow{AB}$.

Propriété 1 :

Toute droite du plan de vecteur directeur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$ à pour équation cartésienne :

$$ax+by+c=0 \quad \text{avec } a,\ b,\ c\in\mathbb{R} \text{ et } a \text{ ou } b \text{ non nul}$$

Démonstration : *Exigible en fin de seconde*

Proposition à démontrer : « Toute droite du plan de vecteur directeur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$à pour équation cartésienne $ax+by+c=0$ avec $a,\ b,\ c\in\mathbb{R}$ et a ou b non nul

On considère la droite (AB) de vecteur directeur $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$

Soit $M(x;y)$ un point de la droite (AB), alors les points A, M et B sont alignés donc les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires :

$$\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-x_A\\y-y_A\end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AM} \text{ et } \overrightarrow{AB} \text{ colinéaires} &\iff \det(\overrightarrow{AM};\overrightarrow{AB})=0\\
&\iff (x-x_A)\times(a)-(y-y_A)\times(-b)\times=0\\
&\iff ax-ax_A+by-by_A=0\\
&\iff ax+by+(-ax_A-by_A)=0\\
&\iff ax+by+c=0 \qquad\qquad \text{avec } c=(-ax_A-by_A)
\end{aligned}$$

La droite (AB) de vecteur directeur $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$ a pour équation cartésienne : $ax+by+c=0$ ■

II. Équation réduite de droite

Propriété 2 :

Soit c un réel.

- Toute droite parallèle à l'axe des ordonnées a pour équation $x=c$,
- L'ensemble des points $M(x;y)$ tels que $x=c$ est une droite parallèle à l'axe des ordonnées.

Propriété 3 :

Soients m et p des réels.

1. Tout droite non parallèle à l'axe des ordonnées est de la forme $y = mx + p$,
2. L'ensemble des points $M(x; y)$tels que $y = mx + p$ est une droite non parallèle à l'axe des ordonnées.

Remarque :

- Le réel m s'appelle le **coefficient directeur**, il est parfois appelé a.
- Le réel p est l'**ordonnée à l'origine**, parfois appelé b.

Méthode 1 :

Pour identifier un coefficient directeur ou une ordonnée à l'origine, il faut toujours mettre l'équation sous forme réduite :

1. On développe et simplifie au maximum l'expression
2. On « isole le y » lorsque c'est possible.

- Si on peut « isoler le y » ,

  On identifie la valeur qui est multipliée à notre inconnue « x ». C'est le coefficient directeur de la droite.

  On identifie la valeur « seule » . C'est l'ordonnée à l'origine de la droite.

- Si on ne peut pas « isoler le y », la droite est parallèle à l'axe des ordonnées, donc il n'y a ni coefficient directeur, ni ordonnée à l'origine.

Remarque :

Une équation de droite peut toujours s'écrire sous la forme $ax + by + c = 0$, avec $(a; b) \neq (0; 0)$: c'est ce qu'on appelle l'**équation cartésienne** de la droite.

III. Coefficient directeur

Définition 2:

Soient $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ deux points d'une droite $\mathscr{D}$, le coefficient directeur se calcule grâce à la formule :

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

Exemple 1:

On considère la droite $\mathscr{D}$ passant par $A(2; -1)$ et $B(-1; 5)$.
Comment déterminer l'équation de la droite $\mathscr{D}$ passant par deux points A et B ?

Méthode 2 : *A partir de m et p*

La droite D n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées, elle a donc pour équation $y = mx + p$.

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{5+1}{-1-2} = -2$$

$\mathscr{D}$ passe par le point $A(2; -1)$ donc les coordonnées du point A vérifie l'équation de la droite $\mathscr{D}$ d'où :

$$\begin{aligned} & y_A = mx_A + p \\ \iff & y_A = -2x_A + p \\ \iff & -1 = -2 \times 2 + p \\ \iff & p = 3 \end{aligned}$$

La droite $\mathscr{D}$ a pour équation réduite : $y = -2x + 3$

Méthode 3 : *Avec des vecteurs*

Soit $M(x; y)$ un point de la droite $\mathscr{D}$, alors les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires :

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x_M - x_A \\ y_M - y_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-2 \\ y+1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AM} \text{ et } \overrightarrow{AB} \text{ colinéaires} \iff & (-3) \times (y+1) - 6 \times (x-2) = 0 \\ \iff & -3y - 3 - 6x + 12 = 0 \\ \iff & -6x - 3y + 9 = 0 \end{aligned}$$

La droite $\mathscr{D}$ a pour équation cartésienne : $2x + y - 3 = 0$

IV. Droites parallèles, droites sécantes

Propriété 4 :
Deux droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ d'équations respectives $y = mx + p$ et $y = m'x + p'$ sont :
- parallèles si et seulement si $m = m'$,
- sécantes si et seulement si $m \neq m'$.

Exemple 2:
Déterminer une équation de la droite $\mathscr{D}$ parallèle à la droite $\mathscr{D}'$ d'équation $y = 2x - 3$ passant par le point $A(1;5)$.

La droite D n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées, elle a donc pour équation $y = mx + p$.

$\mathscr{D}$ est parallèle à $\mathscr{D}'$ donc $m_{\mathscr{D}} = m_{\mathscr{D}'} = 2$

$\mathscr{D}$ passe par le point $A(1;5)$ d'où :

$$y_A = mx_A + p$$
$$5 = 2 \times 1 + p$$
$$p = 3$$

La droite $\mathscr{D}$ a pour équation réduite $y = 2x + 3$

V. Représentation graphique

Comment tracer la représentation graphique d'une droite?

Méthode 4 : *Calcul de coordonnées de points appartenant à la droite*
1. Choisir deux valeurs de x : x_1 et x_2,
2. Calculer y_1 et y_2,
3. Placer les points $A(x_1; y_1)$ et $B(x_2; y_2)$ dans le plan muni d'un repère $(O; I; J)$
4. Tracer la droite (AB)

Méthode 5 : *Utilisation du coefficient directeur et de l'ordonnée à l'origine*
1. Dans un repère $(O; I; J)$, placer le point P de coordonnées $P(0; p)$,
2. A partir de ce point, tracer le vecteur $\overrightarrow{v}(1; m)$ ce qui nous donne un second point M
3. Tracer la droite (MP).

Exemple 3:
Représentons graphiquement la droite d'équation $y = \frac{2}{3}x - 2$ avec la méthode des coordonnées de points.

1. Choix de x_1 et x_2. Le mieux est de prendre deux valeurs pouvant se placer dans le repère tracé (ici entre -4 et 4) et relativement écartées afin d'avoir une meilleur précision de tracé.
   Je choisis ici $x_1 = -3$ et $x_2 = 3$ afin de simplifier les calcul de y_1 et y_2
2. $y_1 = \frac{2}{3}x_1 - 2$ et $y_2 = \frac{2}{3}x_2 - 2$
   Donc : $y_1 = \frac{2}{3} \times (-3) - 2$ et $y_2 = \frac{2}{3} \times (3) - 2$
   Donc : $y_1 = -4$ et $y_2 = 0$
3. On place les points $A(x_1; y_1)$ et $B(x_2; y_2)$ (en bleu sur le graphique)
4. On la droite (AB) (en rouge sur le graphique)